Sistemas Dinámicos lineales (Visualización)

Daniel López Montero & Rodrigo de la Nuez Moraleda

April 1, 2020

Abstract

Este documento tiene por finalidad el estudio en profundidad de los sistemas dinámicos lineales: clasificación, puntos de equilibrio, generalización y computación. Hemos conseguido relacionar estrucuras algebraicas aparentemente sin conexión y aportamos un método general y matricial para el cálculo de sistemas en cualquier punto del mismo.

Contents

1 Sistemas Dinámicos de Primer Orden

1.1 Fórmula General

1.1.1 Fórmula General Explícita

Partiendo de que la fórmula de solución única de un sistema dinámico de primer orden es:

$$A(n+1) = rA(n) + b$$

donde $A(0), r, b \in \mathbb{R}$.

Los primeros n términos de nuestra sucesión son:
$A(0)$
$A(1) = rA(0) + b$
$A(2) = r(rA(0) + b) + b = r^2A(0) + rb + b = r^2A(0) + b(r+1)$
$A(3) = r(r(rA(0) + b) + b) + b = r^3A(0) + r^2b + rb + b = r^3A(0) + b(r^2 + r + 1)$
$\vdots$
$A(n) = r^nA(0) + (r^{n-1}b + \cdots + r^2b + rb + b) = r^nA(0) + b(r^{n-1} + \cdots + r^2 + r + 1)$

Sabemos que $r^{n-1} + \cdots + r^2 + r + 1 = p(x)(r) \in \mathbb{R}[x]$ y $p(x)$ es el polinomio ciclotómico de grado $n-1$ y que $p(x)(r)$ es el resultado de la suma de la progresión geométrica:

$$p(x)(r) = \sum_{i=0}^{n-1} r^i = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

y por ello podemos deducir: $A(n) = A(0)r^n + b\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$.

Proof. Vamos a demostrar la fórmula general (1) por inducción sobre n:

$$A(n) = A(0)r^n + b\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) \tag{1}$$

$A(1) = A(0)r + b = A(0)r^1 + b\left(\frac{r^1-1}{r-1}\right)$

Suponemos cierta la fórmula hasta n, veamos que se cumple para $n+1$:

$A(n+1) = rA(n) + b \Rightarrow$Por (1): $A(n+1) = r\left(A(0)r^n + b\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)\right) + b = r^{n+1}A(0) + b\left(\frac{r(r^n-1)}{r-1}\right) + b = r^{n+1}A(0) + b\left(\frac{r^{n+1}-r}{r-1} + 1\right) = r^{n+1}A(0) + b\left(\frac{r^{n+1}-r+r-1}{r-1}\right) = r^{n+1}A(0) + b\left(\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right)$ $\square$

1.1.2 Fórmula General Matricial

Podemos considerar nuestro sistema dinámico como una afinidad. Sea ϕ una afinidad de un espacio afín en sí mismo de dimensión 1:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & r \end{pmatrix}$$

Entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ A(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(n) \end{pmatrix}$.
$p_\phi = -(x-1)(x-r)$ es diagonalizable en cierta base B.

1. $r \neq 1, b \neq 0$
   $M(B, B_C) = \begin{pmatrix} \frac{1-r}{b} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 1 \\ A(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-r}{b} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{b}{1-r} & 0 \\ \frac{b}{r-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b(r^n-1)}{r-1} & r^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(0) \end{pmatrix}$
   $A(n) = \frac{b(r^n-1)}{r-1} + r^n A(0)$

2. $r = 1$
   $A(n) = bn + A(0)$

3. $b = 0$
   $A(n) = A(0)r^n$

$$A(n) = \begin{cases} \frac{b(r^n-1)}{r-1} + r^n A(0) & r \neq 1, b \neq 0 \\ bn + A(0) & r = 1 \\ A(0)r^n & b = 0 \end{cases}$$

1.2 Clasificación

Podemos estudiar y clasificar el sistema dinámico de primer orden en función de la afinidad: ϕ

1. Si $r = 0$, entonces ϕ transforma toda recta en un punto:

$$\phi(a) = \phi(p) + \tilde{\phi}(\overrightarrow{pa}) = b$$

   Entonces el único punto de equilibrio es b.

2. Si $r = 1$, entonces ϕ es una traslación τ_u,donde $u = (b)$
   (a) Si $b = 0$, todos los puntos son de equilibrio.
   (b) Si $b \neq 0$,no hay puntos de equilibrio

3. Si $r \neq 1, 0$ entonces ϕ es una homotecia de razón r y solamente tiene un punto fijo (punto de equilibrio)
   El único punto de equilibrio es el centro de la homotecia: $\frac{b}{1-r}$

1.3 Puntos de equilibrio y Visualización

Para la visualización hemos utilizado la fórmula general modificada en la aplicación Geogebra:

$$f(x) = A_0 r^{\lfloor x \rfloor} + b\frac{r^{\lfloor x \rfloor} - 1}{r - 1}$$

Mediante esta fórmula podemos deducir los aspectos cualitativos de cada sistema dinámico:

1. $|r| < 1$
   $\lim_{n\to\infty} A(n) = 0 + \frac{-b}{r-1} \Rightarrow \exists \lim$ y converge

2. $r > 1$
   (a) $A_0 = \frac{-b}{r-1}$
   $\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-b}{r-1} r^n + b\frac{r^n-1}{r-1} = \lim_{n\to\infty} r^n(\frac{-b}{r-1} + \frac{b}{r-1}) + \frac{-b}{r-1} = \frac{-b}{r-1} = A_0, \exists \lim$ y converge

(b) $A_0 \neq \frac{-b}{r-1}$

$\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} r^n(A_0+\frac{b}{r-1})+\frac{b}{1-r} = \lim_{n\to\infty} r^n\alpha+\frac{b}{1-r}(\alpha \neq 0) = \begin{cases} \infty & \text{si } A_0 < \frac{-b}{r-1} \\ -\infty & \text{si } A_0 > \frac{-b}{r-1} \end{cases}, \exists \lim$ y diverge

3. $r < -1$

   (a) $A_0 = \frac{-b}{r-1}$
   $\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{r-1}r^n + b\frac{r^n-1}{r-1} = \lim_{n\to\infty} r^n(\frac{-b}{r-1}+\frac{b}{r-1}) + \frac{-b}{r-1} = \frac{-b}{r-1} = A_0, \exists \lim$ y converge

   (b) $A_0 \neq \frac{-b}{r-1}$
   $\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} r^n(A_0+\frac{b}{r-1}) + \frac{b}{1-r} = \lim_{n\to\infty} r^n\alpha + \frac{b}{1-r}(\alpha \neq 0) \Rightarrow \nexists \lim$

4. $r = -1$

   (a) $2A_0 = b$

   $\lim_{n\to\infty} A(n) = \begin{cases} A_0 & \text{si } x \equiv_2 0 \\ -A_0 + b = A_0 & \text{si } x \equiv_2 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim$ y converge

   (b) $2A_0 \neq b$

   $\lim_{n\to\infty} A(n) = \begin{cases} A_0 & \text{si } x \equiv_2 0 \\ -A_0 + b & \text{si } x \equiv_2 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim$

5. $r = 1$
   Tenemos una indeterminación de $\{1^\infty\}$. Como el $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$:
   $\lim_{n\to\infty} A(n) = \begin{cases} \infty & \text{si } b > 0, \exists \lim \text{ y diverge} \\ -\infty & \text{si } b < 0, \exists \lim \text{ y diverge} \\ A_0 & \text{si } b = 0, \exists \lim \text{ y converge} \end{cases}$

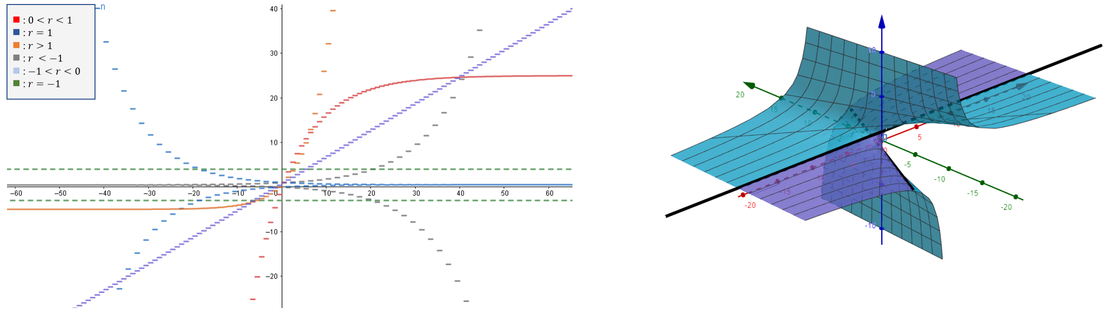
El conjunto de los puntos de equilibrio seria:

$$P \in \mathbb{R}^3, P = \{(A_0, b, r) | A_0 = \frac{b}{1-r}, b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\} \cup \{(A_0, 0, 1) | A_0 \in \mathbb{R}\}$$

Clasificación de los puntos de equilibrio E, I, N (Estable, Inestable, Neutro):

$$E = \{x \in P : |r| \leq 1\} \quad I = \{x \in P : |r| > 1\} \quad N = \{x \in P : r = -1\}$$

En las siguientes figuras observamos los diferentes comportamientos de $A(n)$.



(a) Representación $A(n)$ en funcion de n https://www.geogebra.org/graphing/pyvrcb6j

(b) Clasificación de los puntos de equilibrio https://www.geogebra.org/3d/qqrkqphf

Figure 1: Representación de sistemas dinámicos

2 Sistemas Dinámicos de Segundo Orden

2.1 Fórmula General

2.1.1 Fórmula General Matricial

$$A(n+2) = a_1 A(n+1) + a_0 A(n) + b$$

Podemos considerar nuestro sistema dinámico como una afinidad. Sea ϕ una afinidad de un espacio afín en sí mismo de dimensión 2:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

Ecuación General sin desarrollar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A(n) \\ A(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(n-1) \\ A(n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \phi^n \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

donde $u_{i+1} := \begin{pmatrix} A(i) \\ A(i+1) \end{pmatrix}$

2.1.2 Fórmula General Desarrollada

$$\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a_1-k}{2a_0} & \frac{-a_1+k}{2a_0} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1-k) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a_1+k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-a_0}{k} & \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2k} \\ \frac{a_0}{k} & \frac{1}{2} + \frac{a_1}{2k} \end{pmatrix}, k := \sqrt{a_1^2 + 4a_0}$$

Sea $b := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

$$u_{n+1} = \phi^n u_1 = \tilde{\phi}(\dots\tilde{\phi}(\tilde{\phi}u_1+b)+b\dots)+b = \tilde{\phi}^n u_1+(\tilde{\phi}^{n-1}+\dots+\tilde{\phi}+1)b = \tilde{\phi}^n u_2+\left(\tilde{\phi}^n - 1\right)\left(\tilde{\phi}-1\right)^{-1} b$$

$$u_{n+2} = \tilde{\phi}^n \left(u_2 + \left(\tilde{\phi}-1\right)^{-1} b\right) - \left(\tilde{\phi}-1\right)^{-1} b$$

Si denotamos $T := \left(\tilde{\phi}-1\right)^{-1} b$, obtenemos la fórmula general desarrollada:

$$\boxed{u_{n+2} = \tilde{\phi}^n \left(u_1 + T\right) - T}$$

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{-a_1-k}{2a_0} & \frac{-a_1+k}{2a_0} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a_1-k\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a_1+k) \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{-a_0}{k} & \frac{1}{2}-\frac{a_1}{2k} \\ \frac{a_0}{k} & \frac{1}{2}+\frac{a_1}{2k} \end{pmatrix} (u_1+T) - T$$

2.2 Clasificación y Visualización

Ahora podemos clasificar los distintos sistemas dinámicos en función de la afinidad asociada. Sea $p_{\tilde{\phi}}$ el polinomio mínimo de $\tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_{\tilde{\phi}} = x^2 - a_1 x - a_0$

1. $q_{\tilde{\phi}} = (x+1)(x-1)$

   $(a_0 = 1, a_1 = 0) \Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

   (a) $b \neq 0$
   Simetría con desplazamiento

   (b) $b = 0$
   Simetría con base: $V_{\tilde{\phi},1}$y dirección: $V_{\tilde{\phi},-1}$.

2. $q_{\tilde{\phi}} = (x-1)(x-r), r \neq 0, 1, -1$

   $(a_0 = -r, a_1 = r+1) \Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r & r+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/r \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/r \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r}{r-1} & \frac{-1}{r-1} \\ \frac{-r}{r-1} & \frac{r}{r-1} \end{pmatrix}$

   (a) $b \neq 0$
   Homología general con desplazamiento

   (b) $b = 0$
   Homología general de razón r.

3. $q_{\tilde{\phi}} = (x-1)^2$

   $(a_0 = -1, a_1 = 2) \Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) $b \neq 0$
   Homología especial con desplazamiento

   (b) $b = 0$
   Homología especial

4. $q_{\tilde{\phi}} = (x-s)(x-r), s \neq r$

   $(a_0 = -sr, a_1 = s+r) \Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -rs & r+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-rs}{r-s} & \frac{r}{r-s} \\ \frac{rs}{r-s} & \frac{-s}{r-s} \end{pmatrix}$

   (a) Composición de homologías general

5. $q_{\tilde{\phi}} = (x-r)^2$

   $(a_0 = -r^2, a_1 = 2r) \Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{-1}{r^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{-1}{r^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{-1}{r^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r^2 & r \end{pmatrix}$

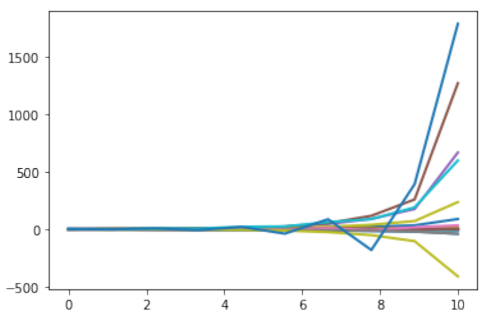
   (a) Homología especial compuesta con homotecia

6. $q_{\tilde{\phi}} = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha}), \alpha = n + pi \in \mathbb{C}$

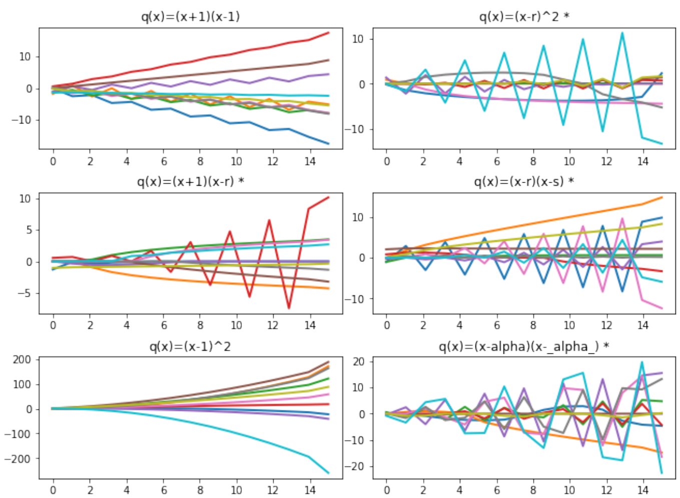
   $(a_0 = -n^2 - p^2, a_1 = 2n) \Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(n^2+p^2) & 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & -p \\ p & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & n \end{pmatrix}^{-1} = \sqrt{n^2+p^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n^2+p^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{n^2+p^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-n}{p} & \frac{1}{p} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Rotación compuesta con homotecia

En las siguientes figuras se observa el comportamiento de $A(n)$ en función de la clasificación previa realizada. Para ello se han creado 20 funciones con parámetros aleatorios que cumplan la restricción.



(a) Representación $A(n)$ en funcion de n



(b) Representación los sistemas dinámicos según su clasificación. (*): la gráfica está escalada al log_2 para su visualización

Figure 2: Representación de sistemas dinámicos de segundo orden https://github.com/dani2442/SistemasDinamicosLineales

2.3 Proceso Inverso

Hasta ahora hemos calculado $A(n)$ teniendo los valores iniciales y los parámetros, pero podemos plantearnos el proceso inverso hasta ahora:

1. Calcular $A(0)$ teniendo los parámetros y $A(n)$
   Sabemos que $u_{n+r} = \phi^n u_r \Rightarrow u_r = \phi^{-n} u_{n+r}$, siempre que $|\phi| \neq 0 \Leftrightarrow 0$ no es autovalor $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

2. Calcular los parámetros teniendo $A(0)$ y $A(n)$

2.4 Puntos de equilibrio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A(n-1) \\ A(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(n-1) \\ A(n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A(n-1) = A(n) \\ A(n) = b + A(n)(a_0 + a_1) \end{cases}$$

donde $A(n) = b + A(n)(a_0 + a_1) \Leftrightarrow 1 = a_0 + a_1 + \frac{b}{A(0)}$

3 Sistemas Dinámicos de Orden N

3.1 Fórmula General

3.1.1 Fórmula General Matricial

$$A(n+r) = a_{r-1}A(n+r-1) + ... + a_1 A(n+1) + a_0 A(n) + b$$

Podemos considerar nuestro sistema dinámico como una afinidad. Sea ϕ una afinidad de un espacio afín en sí mismo de dimensión r:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & & 1 \\ b & a_0 & \dots & \dots & a_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_p^T & \\ b & & & \end{pmatrix}, p(x) = (-a_0, \dots, -a_{r-1})(x) \in K[x]$$

3.1.2 Fórmula General Desarrollada

Denotaremos $v_{n+r} := \begin{pmatrix} A(n+1) \\ \vdots \\ A(n+r) \end{pmatrix}, C_p^T := C_p, b := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Entonces $\begin{pmatrix} 1 \\ A(n+1) \\ \vdots \\ A(n+r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & C_p^T & \\ b & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(n) \\ \vdots \\ A(n+r-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & C_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+r-1} \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+r-1} \end{pmatrix} = \phi^n \begin{pmatrix} 1 \\ v_{r-1} \end{pmatrix} = C_p(\dots(C_p v_{r-1} + b)\dots) + b = C_p^n v_{r-1} + (C_p^{n-1} + \dots C_p + I)b = C_p^n v_{r-1} + (C_p^n - I)(C_p - I)^{-1} b$$

$$v_{n+r} = C_p^n \left(v_r + (C_p - I)^{-1} b\right) - (C_p - I)^{-1} b$$

Si denotamos $T := (C_p - I)^{-1} b$, esta forma explicita de operar solo es posible si $|C_p - I| \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ no es autovalor}), 1 \notin \sigma(C_p) \Leftrightarrow (x-1)$ no divide a $p(x)$.

Fórmula General desarrollada:

$$\boxed{v_{n+r} = C_p^n (v_r + T) - T}$$

3.2 Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del caso n se dan cuando $A(r) = A(r+i), \forall i \in \mathbb{N}$ como se demuestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ A(n+1) \\ \vdots \\ A(n+r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & C_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ A(n) \\ \vdots \\ A(n+r-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A(n+1) = A(n) \\ \vdots \\ A(n+r) = A(n+r-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(n) = \dots = A(n+r) \\ A(n) = b + A(n)(a_0 + \dots + a_{r-1}) \end{cases}$$

donde $A(n) = b + A(n)(a_0 + \dots + a_{r-1}) \Leftrightarrow 1 = (a_0 + \dots + a_{r-1}) + \frac{b}{A(n)}$.

3.3 Computación y Particularización del Problema

Nuestro objetivo es construir un algoritmo rápido y explícito para calcular $A(n)$. Existen varios algoritmos de exponentación de la matriz compañera:

1. Diagonalización: solo es factible si el polinomio descompone completamente en factores lineales no repetidos: $p(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_r)$, donde $\lambda_i \neq \lambda_j$si $i \neq j$.

$$C^n = A^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix}^n A$$

2. Forma canónica de Jordan: solo es factible si el polinomio de la compañera descompone completamente $p(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \dots (x - \lambda_t)^{t_m}$, donde $t_1 + \dots + t_m = r$
   Como el polinomio mínimo coincide con el característico, solo tendremos una caja de Jordan por cada λ_i y sería la siguiente:

$$C^n = A^{-1} \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,t_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_m,t_m} \end{pmatrix}^n A$$

   donde $J^n_{\lambda_i,t_i} = (\lambda_i I + J_{0,t_i})^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \lambda^{n-j} J^j_{0,t_i}$, sabiendo que J_{0,t_i} es nilpotente, solo tenemos que desarrollar el binomio de Newton hasta $j = min\{t_i, n\}$, $J^n_{\lambda_i,m} = \sum_{j=0}^{\min\{t_i,n\}} \binom{n}{j} \lambda^{n-j} J^j_{0,t_i}$

3. Exponentación rapida: calcular n en base 2, $(n)_{10} = (b_m \dots b_0)_2$:

$$C^n = \sum_{i=0}^{m} b_i C^{2^i}, \text{donde } C^{2^{i+1}} = \left(C^{2^i}\right)^2$$

4. Usando el Teorema de Cayley-Hamilton:
   Dividimos $x^n/p(x)$, donde $p(x)$ es el polinomio de la compañera)

$$C^n = p(C)q(C) + r(C) = r(C)$$

   donde $r(x) \in K[x]$ y $rg(r(x)) < rg(p(x))$.